

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

4.1 Задачи статики

Решение U линейной статической задачи при всех возможных перемещениях V удовлетворяет равенствам:

$$a_0(U, V) = q(V), \quad (4.1)$$

где $a_0(U, V)$, $q(V)$ — функционалы возможных работ внутренних и внешних сил, линейные по V , функционал $a_0(U, V)$ линеен и по U , симметричен и положительно определен.

Во всех программных комплексах семейства ЛИРА 10 реализован метод конечных элементов (МКЭ) в форме перемещений — искомыми функциями являются перемещения. Этот вариант МКЭ наиболее легко поддается алгоритмизации и компьютерной реализации.

Основная концепция МКЭ заключается в непосредственной дискретизации рассчитываемой системы, которая расчленяется расчетной сеткой на конечные элементы. Для полученной дискретной модели вводится система кусочно-непрерывных функций $\{\phi_l(x)\}$, определенных на конечном числе подобластей — звездах конечных элементов

(рис. 4.1), т.е. $\phi_l(x) = \begin{cases} \phi_{lj}(x) & x \in \Omega_j \\ 0 & x \notin \Omega_j \end{cases}$.

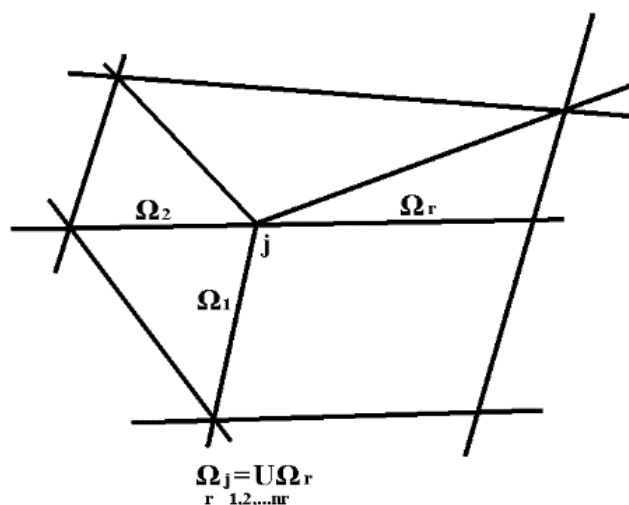


Рис. 4.1. Звезды конечных элементов

Искомая функция перемещений по области системы $u(x)$, $x \in \Omega$ приближенно принимается в виде:

$$u_h(x) = \sum_{l=1}^L q_l \phi_l(x), \quad (4.2)$$

где L — общее число узловых неизвестных, которое в общем случае не равно числу узлов, так как в каждом узле может быть различное число неизвестных. Узловым неизвестным q_l в МКЭ, как правило, придается физический смысл, это искомые значения перемещений и их производных в узлах расчетной сетки.

При подстановке (4.2) в (4.1) задача сводится к определению значений конечного числа неизвестных q_l . Более подробно МКЭ изложен в п. 18.9.

Базисные функции $\{\phi_l(x)\}$ должны удовлетворять условиям сходимости МКЭ:

- Функции $\{\phi_l(x)\}$ принадлежат энергетическому пространству. Это означает, что, наряду с удовлетворением главным граничным условиям, представление (4.2) обеспечивает существование по всей области Ω тех перемещений и их производных, которые входят в функционал (4.1). Элементы, базисные функции которых удовлетворяют этому условию, называются совместными или конформными. В неконформном случае требуются дополнительные условия.

- Функции ϕ_l линейно независимы. Это требование необходимо для разрешимости системы МКЭ.

- Система базисных функций $\{\phi_l\}$ должна быть полной в энергетическом пространстве. Это означает, что функции (4.2) при неограниченном сгущении сетки аппроксимируют в энергетическом смысле любые возможные перемещения по области Ω с любой заранее заданной степенью точности.

Выполнение этих требований позволяет получить оценку погрешности перемещений и напряжений, полученных на основе МКЭ [18.13]:

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq c_u h^t \quad (4.3)$$

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{L_2} \leq c_\sigma h^\tau \quad (4.4)$$

где u, u_h, σ, σ_h — точные и приближенные значения перемещений и напряжений;

L_2 — континуальный аналог квадратичной невязки;

c_u, c_σ — константы;

h — максимальный размер конечного элемента;

t, τ — порядок сходимости МКЭ по перемещениям и напряжениям.

Все конечные элементы, включенные в БКЭ, теоретически обоснованы, для них получены оценки погрешности по перемещениям и по напряжениям t и τ . Теоретически обоснована также возможность задания криволинейных стержней прямолинейными элементами и произвольных оболочек треугольными и прямоугольными (для цилиндрических оболочек) элементами плоской оболочки. Погрешность по напряжениям и перемещениям оценивается здесь величиной, пропорциональной h . В БКЭ включены только такие элементы, для которых математически доказана сходимость, то есть получены t и τ . Значения этих параметров позволяют не только обрести уверенность в результатах решения той или иной задачи, но и оценить степень приближения полученного решения к точному.

Теоретические основы МКЭ подробно описаны в [18.13].

Решение системы канонических уравнений

После того как заданная конструкция представлена в виде конечно-элементной схемы, задача об определении перемещений узлов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$AX=B \quad (4.5)$$

где A — симметричная положительно определенная матрица размером $N \times N$;

B — матрица правых частей (загружений) размером $N \times k$ (k — количество загружений);

X — искомая матрица перемещений размером $k \times N$.

Для решения системы (4.5) предварительно производится треугольное разложение матрицы A методом Гаусса. Поскольку в большинстве случаев матрица A является разреженной, то для уменьшения требуемой оперативной памяти, внешней памяти и времени счета предварительно производится упорядочение неизвестных системы (4.5) с целью минимизации количества вычислений при разложении. Реализованы следующие методы упорядочения: алгоритм минимальной степени и многоуровневый алгоритм декомпозиции. Пользователю предоставлена возможность выбора метода упорядочения. По умолчанию выполняется упорядочивания обеими методами с выбором лучшего. Конкретные рекомендации для выбора метода упорядочения не могут быть даны, так как эффективность того или иного алгоритма существенно зависит от структуры конкретной матрицы A . Методы снижения влияния плохой обусловленности матрицы обсуждаются в работе [18.13]. Если в процессе треугольного разложения матрицы A выясняется, что она вырождена, то производится автоматическое наложение связей, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость. При этом пользователю предоставляется информация о номерах узлов и номерах степеней свободы, по которым произведено наложение связей. В этом случае рекомендуется внимательно проанализировать расчетную схему и выяснить происхождение геометрической изменяемости конструкции.

Дополнительным сервисным средством является контроль решения системы (4.5). При появлении сообщения о большой величине ошибки решения, которое, как правило, является следствием плохой обусловленности матрицы A , следует внимательно проанализировать результат и убедиться, что полученное решение приемлемо с инженерной точки зрения.

4.2 ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Задача динамического расчета формулируется, как и в статическом случае, в виде вариационного равенства:

$$b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + c\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + a(u, v) = (f(t), v), \quad t > 0,$$

$$u(0) = u_0, \partial u / \partial t(0) = u_1, \quad (4.6)$$

где $u_i = u(t)$ — точное решение;

$b(u, v)$, $c(u, v)$ — возможные работы инерционных и демпфирующих сил;

u_0 , u_1 — начальные значения перемещения и скорости;

остальные обозначения те же, что и в статической задаче.

Реализован метод решения динамической задачи, заключающийся в сочетании МКЭ с разложением по формам собственных колебаний.

Решение системы уравнений (4.6) ищем в виде:

$$u_n = \sum_{i=1}^N u_i(t) \mu_i, \quad (4.7)$$

где $u_i = u(t)$ — скалярные функции;

μ_i — базисные функции соответствующей статической задачи.

Подставив в (4.6) формулу (4.7) и μ_j ($j=1, \dots, N$) вместо v , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + C \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = P(t), \quad (4.8)$$

где $x(t)$, x_0 , x_1 — векторы с элементами $X_l(t) = u_l(t)$, $X_l(0) = L_l U_0$, $X_l(1) = L_l U_1$,
 M и C — матрицы масс и демпфирования с элементами $m_{i,j} = b(\mu_i, \mu_j)$, $c_{i,j} = c(\mu_i, \mu_j)$.

Кроме диагональной матрицы масс может использоваться и согласованная матрица масс, элементы которой вычисляются на основании базисных функции МКЭ.

Матрица жесткости K и вектор нагрузок $P(t)$ определяются, как для статической задачи. Этот метод известен как полудискретная аппроксимация. Его погрешность (разность между U и U_h) по потенциальной и кинетической энергии оценивается как в совместном, так и в несовместном случаях величиной, пропорциональной h .

Систему (4.8) решаем методом разложения по формам собственных колебаний. Пусть λ_i, ϕ_i , решение задачи на собственные значения:

$$K \phi = \lambda M \phi \quad (4.9)$$

Задача на собственные значения (4.9) решается методом итерации подпространств.

Полагая в (4.8) $x(t) = \sum_{i=0}^N y_i(t) \phi_i$, из ортогональности функций ϕ_i получим (при определенных предположениях относительно матрицы C), что система (4.8) распадается на независимые уравнения относительно $y_i(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} y_i(t) + 2\xi_i \omega_i \frac{d}{dt} y_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) &= P_i(t), \quad t > 0, \\ y_i(0) = y_i^0, \quad \frac{dy_i}{dt}(0) &= y_i^1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\omega = \lambda_i^{-0.5}$, $0 < \xi_i < 1$, $P_i(t) = \langle P(t), \phi_i \rangle$, $y_i^0 = \langle x^0, M \phi_i \rangle$,
 $y_i^1 = \langle x^1, M \phi_i \rangle$

Решение уравнения (4.10) имеет вид:

$$y_i = e^{-\xi_i \omega_i t} \left(\frac{y_i^1 + y_i^0 \xi_i \omega_i}{\omega_i} \sin \varpi_i t + y_i^0 \cos \varpi_i t \right) + \frac{1}{\varpi_i} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \varpi_i (t-\tau) d\tau,$$

где $\varpi_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$

Векторы инерционных сил $S_i(t)$ вычисляются по формуле: $S_i(t) = \omega_i^2 y_i(t) M \phi_i$.

В расчетах используются величины, выражаемые формулой: $S_{i,0} = \max_t \{ \omega_i^2 y_i(t) \}$.

При этом:

1. Для ветровой нагрузки:

$$S_{i,0} = w_n \gamma_i,$$

где w_n — нормативное значение ветровой нагрузки;

γ_i — коэффициент динамичности, зависящий от ω_i , ξ_i и скорости ветра.

2. Для сейсмической нагрузки:

$$S_{i,0} = A \beta_i,$$

где A — относительная величина ускорения;

β_i — коэффициент динамичности, зависящий от ω_i и ξ_i .

3. Для импульсной и ударной нагрузок ($t_0 \leq 2.5 \frac{2\pi}{\omega_i}$):

$$S_{i,0} = \varepsilon_i \overline{P_i} \psi,$$

где ε_i , зависит от t_0 , ω_i ;

t_0 — время действия импульса;

ψ — учитывает периодичность действия нагрузки;

$$\overline{P_i} = \begin{cases} \int_0^{t_0} P_i(\tau) d\tau & \text{— для импульса,} \\ M_0 v_0 (1 + \nu) & \text{— для удара;} \end{cases}$$

где M_0, v_0 — масса и скорость ударяющего тела;

ν — коэффициент восстановления формы соударяющихся тел.

Коэффициент ψ зависит от того, являются ли колебания установившимися

($n > \frac{\pi}{4\xi_1}$) или неустановившимися ($n < \frac{\pi}{4\xi_1}$), где n — число повторений импульсов.

4. Для гармонической нагрузки $P_{i,1} \cos \theta t + P_{i,2} \sin \theta t$ вычисляются суммарные по всем формам инерционные силы S_1 и S_2 , соответствующие косинусоидальной (действительной) и синусоидальной (мнимой) составляющим:

$$S_1 = \sum_i a_i M \phi_i, \quad S_2 = \sum_i b_i M \phi_i,$$

$$\text{где } a_i = \frac{P_{i,1} \chi_i - P_{i,2} \xi_i \alpha_i}{\chi_i^2 + \alpha_i^2 \xi_i^2}, \quad b_i = \frac{P_{i,2} \chi_i + P_{i,1} \xi_i \alpha_i}{\chi_i^2 + \alpha_i^2 \xi_i^2}, \quad \alpha_i = \frac{\theta}{\omega_i}, \quad \chi_i = 1 - \alpha_i^2.$$

$$\text{Тогда } \max \sum_i S_i(t) = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}.$$

В перечисленных выше вариантах воздействий возможно точное вычисление $Y_I(t)$. В остальных случаях решения $Y_I(t)$ находим численно.

В частности, при расчете на сейсмическую нагрузку по акселерограмме в каждый момент времени t_k задается вектор $P_k = P(t_k)$. Тогда в (4.10) имеем $P_{i,k} = P_i(t_k)$. Далее уравнения (4.10) решаются методом конечных разностей по схеме Ньюмарка. Получаем значения перемещений $Y_{1,k} = Y_1(t_k)$ и инерционных сил $S_{i,k} = S_i(t_k)$, по которым вычисляется:

$$S_{i,0} = k \{ \max [\omega_i^2 y_i(t_k)] \}$$

При расчетах на сейсмические воздействия ПК ЛИРА 10 позволяет применить метод спектра ответов. Расчет заключается в том, чтобы при заданной функции $S_0(\omega)$, обычно кусочно-линейной, вычислить линейной интерполяцией значения $S_0(\omega_i)$. Функция $S_0(\omega)$ может быть представлена графиками спектров ускорений, скоростей или перемещений.

Реализованы следующие модули расчета на динамические воздействия:

- (27) Сейсмическое воздействие по однокомпонентной акселерограмме;
- (29) Сейсмическое воздействия по трехкомпонентной акселерограмме;
- (30) Сейсмическое воздействия по СНиП II-7-81* издания 01.01.1996 г. (Российская Федерация);
- (31) Сейсмическое воздействие по СП 31-114-2004 (Российская Федерация);
- (32) Сейсмическое воздействие по СНРА II-6.02-2006 (Республика Армения);

- (33) Сейсмическое воздействие по КМК 2.01.03-96 с учетом изменений от 01.04.2004 (Узбекистан);
- (34) Сейсмическое воздействие по МГСН 4.19-05 (ГСН г. Москва);
- (35) Сейсмическое воздействие по СНиП II-7-81 * издания 01.01.2000 г. (Российская Федерация);
- (36) Сейсмическое воздействие по ДБН В.1.1-12:2014 с изменениями от 01.05.2019 (Украина);
- (37) Сейсмическое воздействие по ДБН В.1.1-12:2014 с изменениями от 01.05.2019, прил. Е (Украина);
- (38) Сейсмическое воздействие по СНиП II-7-81* издания 01.01.2000г. с учетом кручения (Российская Федерация);
- (39) Сейсмическое воздействие по TGN 2.01.08-99 (Туркменистан);
- (41) Сейсмическое воздействие по спектру реакции одномассового осциллятора;
- (42) Сейсмическое воздействие по IBC-2012: ASCE 7-10 (США);
- (43) Сейсмическое воздействие по СНиП РК 2.03-30-2006 (Казахстан);
- (44) Сейсмическое воздействие по EN 1998-1:2004 (Eurocode 8);
- (45) Сейсмическое воздействие по RPA 99 / Version 2003 (Алжир);
- (46) Сейсмическое воздействие по ДБН В.1.1-12:2014 с изменениями от 01.05.2019, прил. И (Украина);
- (47) Сейсмическое воздействие по НП-031-01 (Российская Федерация);
- (48) Сейсмическое воздействие по ГНиП РТ 22-07-2015 (Таджикистан);
- (49) Сейсмическое воздействие по ДБН В.2.2-24:2009 (Украина);
- (50) Сейсмическое воздействие по AzDTN 2.3-1-2010 (Азербайджан) с изменениями от 01.01.2014г.;
- (51) Сейсмическое воздействие по СП 14.13330.2014 (Российская Федерация);
- (52) Сейсмическое воздействие по Turkish Earthquake Code 2007 (Турция);
- (53) Сейсмическое воздействие по PN 01.01-09 (Грузия);
- (54) Сейсмическое воздействие по IS 1893 (Part 1):2002 [2007] (Индия);
- (55) Сейсмическое воздействие по СТО НИУ МГСУ 2015 (Российская Федерация);
- (56) Сейсмическое воздействие по SI 413 Am.5 от 12.2013 (Израиль);
- (57) Сейсмическое воздействие по IRANIAN CODE, Standard No.2800, 3rd Edition, 2007 (Иран);
- (58) Сейсмическое воздействие по СНиП КР 20-02:2009 (Кыргызская Республика);
- (59) Сейсмическое воздействие по СП РК 2.03-30-2017 (Казахстан);
- (60) Сейсмическое воздействие по графикам коэффициента динамичности;
- (61) Сейсмическое воздействие по СП 14.13330.2018 (Российская Федерация);
- (62) Сейсмическое воздействие по СП 268.1325800.2016 (Российская Федерация);
- (63) Сейсмическое воздействие по СП 267.1325800.2016 (Российская Федерация);
- (64) Сейсмическое воздействие по СН КР 20-02:2018 (Кыргызская Республика);
- (65) Сейсмическое воздействие по СП 14.13330.2018 с изменением №1 (Российская Федерация);
- (21) Пульсационная составляющая ветрового воздействия по СНиП 2.01.07-85*;
- (25) Пульсационная составляющая ветрового воздействия по СП 20.13330.2011 (СП 20.13330.2016);

- (22) Импульсное воздействие;
- (23) Ударное воздействие;
- (24) Гармоническое воздействие;
- (28) Гармоническое воздействие с учетом частотных зон;
- (100) Модальный анализ.

Для задач с гармоническим воздействием имеется возможность получения в результатах расчета амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) по компонентам перемещений в узлах (см. п. 3.11). АЧХ — это зависимость амплитудной компоненты получаемого результата (в данном случае перемещений) от частоты возмущения.

4.2.1 Конденсация масс

Для конструкций с сильно отличающимися жесткостными характеристиками (металлические надстройки над ж/б зданиями, довольно податливые перекрытия и т.д.) реализован механизм конденсации масс. При конденсации масс указываются элементы, с которых необходимо собрать массу, и узлы, в которые собранную массу необходимо распределить. Конденсация масс позволяет избавиться от форм собственных колебаний с близким к нулю процентом вклада в реакцию сооружения.

4.2.2 Спектр реакции

При необходимости выполнить сейсмический расчет установленного в здании оборудования используются так называемые поэтажные акселерограммы и поэтажные спектры отклика. После расчета здания или сооружения на сейсмическое воздействие для точек прикрепления оборудования получают законы колебаний — обычно акселерограммы. Их можно непосредственно использовать для расчета оборудования методом прямого интегрирования или по модулям расчета на акселерограммы землетрясений. Если же необходим расчет по спектральной теории сейсмостойкости, то вычисляют поэтажные спектры отклика от поэтажных акселерограмм с дальнейшей возможностью использования полученных спектров отклика в 41 модуле динамики. Поэтажные спектры отклика строятся для 27 и 29 модулей динамики и для прямого интегрирования уравнений движения.

4.3 Задачи устойчивости

Задачи устойчивости тесно связаны с геометрически нелинейными задачами. При применении шагового метода устойчивость конструкции обозначает положительную определенность матрицы линеаризованной системы уравнений. Условием положительной определенности симметричной матрицы, согласно критерию Сильвестра, является положительность всех ее главных миноров, что проверяется в ходе исключения неизвестных методом Гаусса. Такой подход позволяет исследовать устойчивость и при одновременном учете геометрической и физической нелинейностей. Изложенный метод исследования устойчивости называют устойчивостью деформированной схемы.

Для многих задач достаточно исследовать устойчивость недеформированной схемы. В ПК ЛИРА 10 имеется возможность оценки устойчивости конструкции в предположении ее упругой работы. Основной задачей расчета на устойчивость является определение значения критического параметра потери устойчивости конструкции — λ (физический смысл критического параметра потери устойчивости состоит в том, что если увеличить нагрузки, действующие на конструкцию, в λ раз, то система потеряет устойчивость).

Реализованный в ПК ЛИРА 10 вариант оценки устойчивости конструкции предполагает, что распределение внутренних усилий/напряжений σ_0 известно из решения линейной статической задачи и все приложенные к системе внешние силы F_0 (а следовательно, и внутренние усилия/напряжения) растут пропорционально одному и тому же параметру λ . Требуется определить такое значение числового параметра λ , чтобы при внешних силах ($\lambda \cdot F_0$) произошла потеря устойчивости.

Задача определения критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости допускает следующую вариационную формулировку. Найти перемещения $u \neq 0$ и число λ такие, чтобы при всех допустимых перемещениях v было справедливо равенство:

$$a(u, v) = \lambda \cdot d(u, v), \quad (4.11)$$

где $d(u, v)$ — возможная работа усилий/напряжений при заданном их распределении σ_0 .

Возможная работа $d(u, v)$ может учитывать не только усилия растяжения-сжатия, но и остальные компоненты напряженно-деформированного состояния (моменты, перерезывающие силы) [4.2].

Обозначив D матрицу с элементами $d_{i,j} = d(\mu_i, \mu_j)$, получим из (4.11) задачу на собственные значения для пучка матриц:

$$KX = \lambda DX, \quad (4.12)$$

где K — матрица жесткости расчетной схемы;

X — собственные вектора (в данном случае формы потери устойчивости).

Погрешность МКЭ в задаче устойчивости для критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости пропорциональна h^T .

Для решения задачи (4.10) применяется, как и при вычислении частот и форм собственных колебаний в задачах динамики, метод итерации подпространств (QR-метод), что позволяет определить не только первую, но и высшие формы потери устойчивости и соответствующие им критические нагрузки. В данной версии допускается не более десяти форм.

По желанию пользователя могут быть выполнены два варианта расчета:

- классический расчет устойчивости по Эйлеру, когда при составлении матрицы D учитываются только продольные усилия в стержнях и мембранные усилия в оболочках;
- расчет устойчивости с учетом изгибно-крутильных форм, когда при составлении матрицы D учитываются все усилия.

Расчет реализуется в упругой стадии. Значения усилий в элементах схемы уже вычислены с помощью линейного процессора. При выполнении расчета на устойчивость предполагается, что эти значения выражены через критический параметр нагрузки:

$$P_{кр,i} = \lambda_i \cdot P_i, N_{кр,ij} = \lambda_i \cdot N_{ij}, \quad (4.13)$$

где i — номер нагружения;

j — номер элемента в схеме;

P_i — суммарная нагрузка в i -м нагружении;

$P_{кр,i}$ — критическая нагрузка в i -м нагружении;

N_{ij} — усилия в j -м элементе в i -м нагружении;

$N_{кр,ij}$ — критические усилия в j -м элементе в i -м нагружении;

λ_i — параметр нагрузки (коэффициент запаса устойчивости).

В процессе расчета для каждого нагружения определяются первые несколько форм потери устойчивости и соответствующие им коэффициенты запаса устойчивости. В ПК ЛИРА 10 анализ устойчивости можно выполнить для:

- статического нагружения;
- расчетного сочетания нагрузок (без вхождения динамических нагружений);
- стадии возведения сооружения.

В результате вычисляются коэффициенты запаса устойчивости λ_i , первые формы потери устойчивости и коэффициенты свободной длины для стержневых элементов, исходя из общей устойчивости, по следующим формулам:

$$\mu_{y,ij} = \frac{\pi}{l_j} \cdot \sqrt{\frac{EJ_{y,j}}{N_{кр,ij}}}, \quad \mu_{z,ij} = \frac{\pi}{l_j} \cdot \sqrt{\frac{EJ_{z,j}}{N_{кр,ij}}}, \quad (4.14)$$

где $\mu_{y,ij}$, $\mu_{z,ij}$ — коэффициенты свободной длины j -го стержня соответственно в плоскостях $X1oZ1$, $X1oY1$ для i -го нагружения;

$EJ_{y,j}$, $EJ_{z,j}$ — изгибные жесткости j -го стержня в плоскостях соответственно $X1oZ1$, $X1oY1$;

$N_{кр,ij} = \lambda_i \cdot N_{ij}$ — критическое продольное усилие сжатия в j -м стержне для i -го нагружения;

λ_i — коэффициент запаса устойчивости для i -го нагружения;

l_j — длина j -го стержня.

4.4 УЧЕТ ДЕПЛАНАЦИИ ДЛЯ 7-ГО ТИПА СТЕРЖНЯ

При решении задач с депланацией необходимо выбрать 7-й признак схемы в параметрах проекта. В этом случае становится возможным назначать стержням 7-й тип. Для таких элементов или их узлов становится доступным назначение шарниров, согласование сетей, объединение перемещений, депланации, нагрузок в виде бимоментов (см. Главу 2). Теоретические основы учета депланации при решении задачи методом конечных элементов приведены в главе 18.

При решении задач с учетом депланации стержней для определения напряжений во всех точках сечения необходимо знать составляющие момента чистого (свободного) кручения M_{xt} , иногда называемого крутящим моментом Сен-Венана, и момента стесненного кручения (изгибно-крутильного момента) M_{xw} . Это компоненты, на которые можно разложить полный внешний момент кручения $M_x = M_{xt} + M_{xw}$. Момент стесненного кручения и момент чистого кручения в аналитическом виде находятся из зависимостей:

$$M_{xw} = -\frac{d^3\theta}{dx^3} \cdot EJ_w \quad (4.15)$$

$$M_{xt} = GJ_x \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (4.16)$$

где $\theta(x)$ — угол поворота сечения в своей плоскости;

EJ_w — секториальная жесткость сечения;

GJ_x — жесткость сечения на кручение;

x — ось, направленная вдоль стержня.

Начиная с версии ПК ЛИРА 10.12, появилась возможность получать эпюры этих составляющих кручения (M_{xt} и M_{xw}) для стержней с учетом депланации (тип КЭ 7). Соответствующие эпюры, или мозаики, можно отобразить в результатах для стержней.

4.5 РЕДАКТИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИН И СТЕРЖНЕЙ

При решении задач методом конечных элементов в стержнях формируется матрица жесткости, которая в общем случае состоит из:

- Продольная составляющая:

$$K_{EF} = \int_A E(y, z) dydz,$$

где A — полная область поперечного сечения стержня;

$E(y, z)$ — модуль упругости элементарной площадки в точке (y, z) .

Характеризует продольные деформации от продольных сил.

- Изгибная составляющая вокруг оси Y :

$$K_{EIy} = \int_A E(y, z) \cdot (z - z_c)^2 dydz,$$

где A — полная область поперечного сечения стержня;

$E(y, z)$ — модуль упругости элементарной площадки в точке (y, z) ;

z_c — координата центра жесткости сечения по оси Z .

Характеризует деформацию от крутящего момента вокруг локальной оси Y .

- Изгибная составляющая вокруг оси Z :

$$K_{EIz} = \int_A E(y, z) \cdot (y - y_c)^2 dydz,$$

где A — полная область поперечного сечения стержня;

$E(y, z)$ — модуль упругости элементарной площадки в точке (y, z) ;

y_c — координата центра жесткости сечения по оси Y .

Характеризует деформацию от крутящего момента вокруг локальной оси Z .

- Сдвиговая составляющая K_{GAy} — зависит от распределения сдвиговой площади вдоль местной оси стержня Y и модуля упругости, определяет сдвиговую деформацию стержня от сдвигового усилия Q_y .

- Сдвиговая составляющая K_{GAz} — зависит от распределения сдвиговой площади вдоль местной оси стержня Z и модуля упругости, определяет сдвиговую деформацию стержня от сдвигового усилия Q_z .

- Крутящая составляющая K_{EIx} — определяет деформацию кручения стержня от крутящего момента M_x (для стержня 7-го типа от M_{xt}).

- Деplanationная составляющая K_{EIw} — определяет деplanationцию стержня от бимоента M_w (для стержня 7-го типа).

В ПК ЛИРА 10.12 почти для всех стержневых линейных сечений имеется возможность назначения коэффициентов редуцирования матрицы жесткости в **Редакторе сечений** (см. п. 2.13). В расчете будет использована начальная матрица стержня, умноженная на введенный к ее компонентам коэффициент.

Для изотропной пластины толщиной h матрица жесткости в общем случае состоит из мембранной, изгибной и сдвиговой составляющих.

Мембранная матрица для пластин:

$$\begin{bmatrix} D_{xxxx} & D_{xxyy} & 0 \\ \text{symm.} & D_{yyyy} & 0 \\ \text{symm.} & \text{symm.} & D_{xyxy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & h & 0 \\ \text{symm.} & h & 0 \\ \text{symm.} & \text{symm.} & h \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

где D_{xxxx} — характеризует свойство пластины деформироваться в направлении действия усилия N_x от приложенного усилия N_x ;

D_{yyyy} — характеризует свойство пластины деформироваться в направлении действия усилия N_y от приложенного усилия N_y ;

D_{xxyy} — характеризует свойство пластины деформироваться в направлении действия усилия N_x от приложенного усилия N_y и в направлении действия усилия N_y от приложенного усилия N_x (деформация, что вызвана наличием ненулевого коэффициента Пуассона);

D_{xyxy} — характеризует сдвиговую деформацию пластины от усилия T_{xy} .

Изгибная матрица для пластин:

$$\begin{bmatrix} K_{xxxx} & K_{xxуу} & 0 \\ \text{symm.} & K_{уууу} & 0 \\ \text{symm.} & \text{symm.} & K_{хуху} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^3}{12} & \frac{h^3}{12} & 0 \\ \text{symm.} & \frac{h^3}{12} & 0 \\ \text{symm.} & \text{symm.} & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

где K_{xxxx} — характеризует свойство пластины деформироваться в направлении действия усилия M_x (вокруг местной оси элемента Y) от приложенного усилия M_x ;

$K_{уууу}$ — характеризует свойство пластины деформироваться в направлении действия усилия M_y (вокруг местной оси элемента X) от приложенного усилия M_y ;

$K_{xxуу}$ — характеризует свойство пластины деформироваться в направлении действия усилия M_x от приложенного усилия M_y и в направлении действия усилия M_y от приложенного усилия M_x (деформация, что вызвана наличием ненулевого коэффициента Пуассона);

$K_{хуху}$ — характеризует деформацию «скручивания» пластины от усилия M_{xy} .

Сдвиговая матрица для пластин:

$$\begin{bmatrix} H_{xzxz} & 0 \\ 0 & H_{yzyz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5h}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5h}{6} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

где H_{xzxz} — характеризует сдвиг пластины в плоскости XOZ местной системы выравнивания напряжений элемента от приложения срезающих сил Q_x ;

H_{yzyz} — характеризует сдвиг пластины в плоскости YOZ местной системы выравнивания напряжений элемента от приложения срезающих сил Q_y .

В ПК ЛИРА 10.12 для линейных пластин имеется возможность назначения коэффициентов редуцирования матрицы жесткости в **Редакторе сечений** (см. п. 2.13). В расчете при этом будет использована начальная матрица пластины, умноженная на введенный к ее компонентам коэффициент.